

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 8

1. (i) Auf der Einheitssphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, existiert ein nichttriviales endliches Maß auf der Borelschen σ -Algebra, welches unter orthogonalen Transformationen invariant ist.

Hinweis: Sie dürfen die Invarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^d$ unter orthogonalen Transformationen verwenden.

(ii) Zeigen Sie, dass ein solches Maß im Fall $d = 2$, also auf dem Kreis S^1 , bis auf Skalierung eindeutig ist.

2. (i) Definieren Sie die Borel- und Lebesgue- σ -Algebren endlich-dimensionaler reeller Vektorräume so, dass sie von Vektorraum-Isomorphismen erhalten werden.

(ii) Lineare Abbildungen endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorräume sind Borel-messbar.

(iii) Surjektive solche Abbildungen sind auch Lebesgue-messbar (dh messbar bzgl der Lebesgue- σ -Algebren), injektive Abbildungen von nichttrivialen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen in $\mathbb{R}$ -Vektorräume strikt größerer endlicher Dimension jedoch nicht.

Hinweis: Sie dürfen die Existenz nicht λ^d -messbarer Teilmengen in $\mathbb{R}^{d \geq 1}$ verwenden.

3. Beweisen Sie die korrigierte Version von Aufgabe 4(viii) auf Blatt 7 und geben Sie andere Beispiele für Maße mit denselben Werten auf Zylindermengen.

4. *Bernoulli-Experiment zum Münzwurf: nicht-messbare Teilmengen* (Fortsetzung von Aufgabe 4 auf Blatt 7).

Vermittels der natürlichen Identifikation von $\{0, 1\}$ mit der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Restklassen modulo 2 fassen wir $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ als den Raum der $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen auf $\mathbb{N}$ auf,

$$X \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} = \{\text{Abbildungen } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

Der kompakte topologische Raum X wird so zu einer kompakten abelschen topologischen Gruppe, die Addition gegeben durch die punktweise Addition von Funktionen. Unter der *Translation* um $v \in X$ verstehen wir den Homöomorphismus

$$X \xrightarrow{T_v} X, x \mapsto x + v.$$

Wie vorher bezeichnet $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ die Borel- σ -Algebra auf X und $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ das Wahrscheinlichkeitsmaß des fairen Bernoulli-Münzwurfs, weiter $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ das von μ induzierte äußere Maß und $\mathcal{L}$ die σ -Algebra der μ^* -messbaren Teilmengen,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X).$$



Sei schließlich

$$Q := \{(a_n) \in X \mid a_n = 0 \text{ für fast alle } n\}$$

die abzählbare Untergruppe der Funktionen mit endlichem Träger und sei $M \subset X$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von Q in X (dessen Existenz aus dem Auswahlaxiom folgt).

Zeigen Sie:

(i) μ und μ^* sind translationsinvariant, $(T_v)_*\mu = \mu$ und $(T_v)_*\mu^* = \mu^*$ für alle $v \in X$.

(ii) Durch

$$X = \bigcup_{q \in Q} (q + M)$$

ist eine Partition (disjunkte Zerlegung) von X in Teilmengen gleichen äußeren μ^* -Maßes gegeben, dh $\mu^*(q + M)$ hängt nicht von q ab.

(iii) $\mu^*(M) > 0$.

Hinweis: $\mu(X) > 0$.

(iv) Jede μ^* -messbare Teilmenge von M ist eine μ^* -Nullmenge.

Hinweis: $\mu(X) < \infty$.

(v) M ist nicht μ^* -messbar, $M \notin \mathcal{L}$.

(vi) Folgern Sie, dass $\mathcal{B} \subset \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(X)$.

(vii) Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sei die Funktion $\Phi f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch

$$(\Phi f)(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert. Dann ist die so erklärte Abbildung

$$X \xrightarrow{\Phi} X$$

eine topologische Selbsteinbettung als μ -Nullmenge.

(viii) Folgern Sie, dass auch $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$.

Hinweis: Folgern Sie aus (vi), dass $\Phi(X)$ nicht-Borel-Mengen enthält.

(ix) $\mathcal{B} = |\mathbb{R}|$.

Hinweis: Sie dürfen die in der ZÜ bewiesene Tatsache verwenden, dass abzählbar erzeugte σ -Algebren die gleiche Kardinalität haben wie $\mathbb{R}$.

(x) Geben Sie mit (ix) einen weiteren Beweis dafür, dass $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$.

Wenn Sie Ihre Übungen bis Freitag dem 15.12.2023 um 16:00 Uhr in Moodle einreichen, versuchen wir Ihnen zu möglichst vielen Ihrer Abgaben eine Rückmeldung zu geben. Bitte benennen Sie die Datei als B8_Name1_Name2, wenn Sie z.B. zu zweit abgeben, wobei Name1 der Nachname der einreichenden Person sein sollte.

1. (i) Auf der Einheitssphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, existiert ein nichttriviales endliches Maß auf der Borelschen σ -Algebra, welches unter orthogonalen Transformationen invariant ist.

Hinweis: Sie dürfen die Invarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^d$ unter orthogonalen Transformationen verwenden.

- (ii) Zeigen Sie, dass ein solches Maß im Fall $d = 2$, also auf dem Kreis S^1 , bis auf Skalierung eindeutig ist.

(i) $S^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Sei $f: \mathbb{B}_1(0) \rightarrow S^{d-1}$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ die stetige Abbildung.

Betrachte $\mu = f_* \lambda|_{\mathbb{B}_1(0)}$. Dies ist ein Maß auf S^{d-1} .

Es ist $\mu(OA) = \lambda^d(f^{-1}(OA)) \stackrel{(\ast)}{=} \lambda^d(O f^{-1}(A)) = \lambda^d(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $O: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ orthogonale Transformation. $y \in f^{-1}(OA) \Leftrightarrow f(y) \in OA \Leftrightarrow \underbrace{O^{-1}f(y)}_{= f(O^{-d}y)} \in A \Leftrightarrow y \in O f^{-1}(A)$
 klar: μ ist nicht trivial

(ii) Auf S^1 ist ein solches Maß μ eindeutig durch $\mu(S^1) = 1$ bestimmt.

Betrachte $p: [0,1] \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Die Abb ist stetig und damit Borel-wb. Da $P|_{[0, \frac{1}{2})}$ und $P|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ Homöom. auf $[0, \frac{1}{2}]_{S^1}$ bzw. $[\frac{1}{2}, 1]_{S^1}$ sind, folgt, dass auch P^{-1} Borel wb ist, aus dem folg Lemma.
 $= (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+ \cap S^1) \cup \{1\} \in \mathcal{B}(S^1) \leftarrow \mathcal{B}(S^1)$

Lemma: Sei $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine Abb von Messräumen. $\bigcup_n A_n = X$ eine Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{A}$. Ist $f|_{A_n}$ wb $\forall n \in \mathbb{N}$, so auch f .

Bew: Für $B \in \mathcal{B}$ ist $f^{-1}(B) = \bigcup_n \underbrace{f^{-1}|_{A_n}(B)}_{\in \mathcal{A}, A_n \in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ □

Insb ist $(P^{-1})^* \mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{B}(S^1)$
 $\sigma(\{[a,b]: a < b \text{ aus } \mathbb{Q} \cap [0,1]\})$

Damit folgt $\mathcal{B}(S^1) = \sigma(\{[a,b]_{S^1} : a < b \text{ aus } \mathbb{Q} \cap [0,1]\})$
 $p(a) \cdot [0, b-a]_{S^1}$

$= \sigma(\{P(q) \cdot [0, \frac{w}{n}]_{S^1} : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1], w, n \in \mathbb{N}, q + \frac{w}{n} \leq 1\})$
 $=: \mathcal{E}$ n -stabiler Erzeugen $S^1 \subseteq \mathcal{E}$

Ist nun μ ein Maß auf S^1 mit $\mu(S^1) = 1$ und invariant unter orth Transformationen, so ist

$\mu([0, \frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$, da $S^1 = \bigcup_{k=0}^{n-1} P(\frac{k}{n})[0, \frac{1}{n}]_{S^1}$. Damit folgt $\mu([0, \frac{w}{n}]_{S^1}) = \frac{w}{n}$ für $w \leq n$ aus $\mathbb{N}$.

Ist μ' ein weiteres solches Maß, so folgt $\mu|_{\mathcal{E}} = \mu'|_{\mathcal{E}}$ aufgrund der Invarianz unter orthogonalen Transformationen, also $\mu = \mu'$ nach BS A1 (iii)

2. (i) Definieren Sie die Borel- und Lebesgue- σ -Algebren endlich-dimensionaler reeller Vektorräume so, dass sie von Vektorraum-Isomorphismen erhalten werden.

(ii) Lineare Abbildungen endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorräume sind Borel-messbar.

(iii) Surjektive solche Abbildungen sind auch Lebesgue-messbar (dh messbar bzgl der Lebesgue- σ -Algebren), injektive Abbildungen von nichttrivialen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen in $\mathbb{R}$ -Vektorräume strikt größerer endlicher Dimension jedoch nicht.

Hinweis: Sie dürfen die Existenz nicht λ^d -messbarer Teilmengen in $\mathbb{R}^{d \geq 1}$ verwenden.

(i) Endl dim $\mathbb{R}$ -VR kommen mit einer natürlichen Topologie, bzgl deren VR-Iso.

Homöomorphismen sind, also die borelschen σ -Algebren erhalten. Wie def die borelsche σ -Alg dieser Top. Diese wird damit von VR-Iso erhalten. Für $L: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{B}(V) = L^* \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Für einen endl-dim $\mathbb{R}$ -VR V definiere $\mathcal{L}(V) := L^* \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für einen VR-Iso $L: V \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sind $L_1, L_2: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei VR Iso, so ist $L_1^* \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = (L_1 \circ L_1^{-1})^* L_1^* \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = L_1^* (L_2 \circ L_2^{-1})^* \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = L_1^* \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, da $L_2 \circ L_1^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, also Borel m.b. und $(L_2 \circ L_1^{-1})^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz, also Nullmengen wieder auf solche abbildet. Also ist die Def unabh von L .

Sei nun $L: V \rightarrow W$ lin Iso von endl-dim $\mathbb{R}$ -VR, $L \circ L^{-1}: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lin Iso. Dann ist $L^* \mathcal{L}(W) = \underbrace{L^* \cdot L^{-1}}_{\text{lin Iso } V \rightarrow \mathbb{R}^n}^* \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(V)$.

(ii) Sie sind stetig also Borel m.b

(iii) Genügt dies für $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \ m \geq n$, sowie $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \ m \geq n$ zu zeigen.

Für den ersten Teil g.z.z., dass Urbilder von Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ unter π Nullm in $\mathbb{R}^m$ sind.

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann ist $\pi^{-1}(N) = N \times \mathbb{R}^{m-n}$ eine λ^m -Nullm. Sei nun $m \geq n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $M \times \{0_{m-n}\}$ eine λ^m -Nullmenge, also in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Aber $L^*(M \times \{0_{m-n}\}) = M \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

3. Beweisen Sie die korrigierte Version von Aufgabe 4(viii) auf Blatt 7 und geben Sie andere Beispiele für Maße mit denselben Werten auf Zylindermengen.

AB z.B. $\frac{1}{2} (d_{(0,0,\dots)}, \delta_{(1,1,\dots)})$

A4 $X \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ kompakte topologische hausdorffsche Gruppe.

(i) Es sei $v \in X$ und $J := \{j \in \mathbb{N} : v_j = 1\}$. Für $b \in \{0, 1\}$ sei $\bar{b} = b+1$ (in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Dann ist $T_v^{-1}(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(b_i)) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(\bar{b}_i) \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(b_i)$, also $T_v^* M = M$. Damit folgt $T_v^* B = T_v^* \sigma(M) = \sigma(T_v^* M) = \sigma(M) = B$.

Ebenso folgt $T_v^* M = M$, zunächst $(T_v^* M)|_M = M|_M$ und daraus $q_1(M \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(b_i)) = \frac{1}{2^{\text{card } J}}$,

da M n -stabiler Erzeuger mit $X \in M$. Damit folgt $T_v^* \mu^* \stackrel{(*)}{=} (T_v^* \mu)^* = (T_v^* \mu)^*$, da T_v surjektiv und $T_v^* B = B$.

Daraus folgt $T_v^* \mathcal{L} = \mathcal{L}$. (*)

(ii) Alle γ Inhalt auf Halbtring M auf Menge X , $f: X \rightarrow X$ surj mit $f^* M = M$.

$A \in \mathcal{A}: f^* \gamma(A) \leq \gamma(f^{-1}(A)) = \inf \{ \sum_i \gamma(M_i) : M_i \in M, f^{-1}(A) \subseteq \bigcup_i M_i \}$

$$\stackrel{f^* M = M}{=} \inf \{ \sum_i \underbrace{\gamma(f^{-1}(M_i))}_{f^* \gamma(M_i)} : M_i \in M, \underbrace{f^{-1}(A) \subseteq \bigcup_i f^{-1}(M_i)}_{\substack{A \cap f(X) \subseteq \bigcup_i M_i \\ = A, \text{ da } f \text{ surj}}} \} = (f^* \gamma)(A)$$

(iii) Die Nebenklassen $(m+Q) m \in M$ partitionieren X , also part auch $(q+M)_{q \in Q}$.

Diese Translate haben nach (i) gleiches äußeres μ^* Maß.

(iii) $\mu^*(M) > 0$. Es ist $0 < \frac{\mu(X)}{2} = \mu^*(X) \leq \sum_q \mu^*(q+M) \Rightarrow \mu^*(M) > 0$.

(iv) Sei $N \in M$ μ^* -messbar. Dann ist $\mu^*(N) = 0$. Da N μ^* -mb sind es auch die Translate $q+N$ mit $q \in Q$

nach (*), also auch $\bigcup_q q+N$. Es folgt $1 = \mu(X) \geq \mu^*(\bigcup_q q+N) = \sum_q \underbrace{\mu^*(q+N)}_{\mu^*(N)} \Rightarrow \mu^*(N) = 0$

(v), (vi) Folgen sofort aus (iii) + (iv) bzw. (vi) folgt aus (v).

(vii) $\mathbb{B}: X \rightarrow X$, $\mathbb{B}(f)(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}), & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\mathbb{B}(X) = \{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : g(n) = 0 \text{ für } n \text{ ungerade}\}$. Die Umkehrfkt von $\mathbb{B}: X \rightarrow \mathbb{B}(X)$ ist durch

$\mathbb{B}^{-1}(g)(n) = g(2n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wir zeigen, dass $\mathbb{B}$ stetig ist. Es genügt dies auf einer Subbasis nachzuweisen.

Es ist $\mathbb{B}^{-1}(\pi_n^{-1}(b)) = \begin{cases} \pi_{\frac{n}{2}}^{-1}(b), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ X, & \text{falls } n \text{ ungerade, } b=0 \\ \emptyset, & \text{falls } n \text{ ungerade, } b=1 \end{cases}$ offen

$\Rightarrow \mathbb{B}$ stetig

Mit $\mathbb{B}: X \rightarrow X \Rightarrow \mathbb{B}$ top. Selbstabbildung mit eingeschlossenem Bild $\Rightarrow \mathbb{B}(X) \in \mathcal{B}$.

$\mathbb{B}(X) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{2^{i+1}}^{-1}(0)$ nach der obigen Darstellung. Es folgt $\mu(\mathbb{B}(X)) \leq \mu(\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{2^{i+1}}^{-1}(0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \mathbb{B}(X)$ ist Nullm

$$\mathbb{B}(M) \subseteq \mathbb{B}(X)$$

(viii) $M \notin \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{B}(M) \notin \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{B}(X))}_{\mathcal{B}|_{\mathbb{B}(X)}} = \mathcal{P}(\mathbb{B}(X)) \cap \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{B}(M) \notin \mathcal{B}$

$\mathbb{B}(M)$ ist μ^* -Nullm, also in $\mathcal{R} \Rightarrow \mathbb{B}(M) \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{B}$, also $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$

(ix) Nach Hinweis $|B| = |\mathbb{R}|$

§ing

(x) $\{ \phi(A) : A \subseteq X \} \subseteq \mathcal{L}$, If $\phi(A) : A \subseteq X \} = \{ \phi(X) \} \supset \{ X \} = \{ \mathbb{R} \} = \{ B \} \Rightarrow B \notin \mathcal{L}$